TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO

Material Didáctico para Curso de Nivelación

MATEMÁTICAS

TODOS SOMOS TecNM

Número de Registro: RPrIL-072
Fecha de inicio: 2017-04-03
Término de la certificación: 2021-04-03

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

1. Exponentes y radicales

1.1 Definiciones

1.1.1 Exponentes enteros positivos

Si “n” es un entero positivo, la notación exponencial a^n, definida en la tabla siguiente, representa el producto del número real a consigo mismo “n” veces. Nos referimos a a^n como “a” a la “n” potencia o, simplemente, a “a” a la “n”. El entero positivo “n” se denomina exponente y el número real “a” se llama base.

Tabla 1. Notación exponencial.

Caso general (“n” es cualquier entero positivo)	Casos especiales
$a^n = a * a * a \dots * a$	$a^1 = a$
“n” factores de “a”	$a^2 = a * a$
	$a^3 = a * a * a$
	$a^6 = a * a * a * a * a * a$

Ejemplos:

Notación exponencial a^n

$$5^4 = 5 * 5 * 5 * 5 = 625$$

$$(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$(-3)^3 = (-3) * (-3) * (-3) = -27$$

Notación ca^n

$$(5)2^3 = 5 * 8$$

$$(-5)2^3 = (-5) * 8 = -40$$

1.1.2 Exponente cero y negativos

Si a ≠ 0 es cualquier número real y “n” es un entero positivo, entonces:

$$a^0 = 1 \qquad y \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos.

$$(\frac{4}{7})^0 = 1$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$$

1.2 Propiedades de los exponentes

La familiaridad con las reglas siguientes es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases “a” y “b” son números reales, y los exponentes “m” y “n” son enteros.

Tabla 2. Leyes de los exponentes.

Leyes de los exponentes.

Ley.	Ejemplo.	Descripción.
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 3^5 = 3^7$	Para multiplicar dos potencias de la misma base, sume las potencias.
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^2} = 3^3$	Para dividir dos potencias de la misma base, reste los exponentes.

3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{10}$	Para elevar una potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^m = a^m b^m$	$(3 * 4)^2 = 3^2 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia.
5. $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{a^n}$	$(\frac{3}{4})^4 = \frac{3^4}{4^4}$	Para elevar el cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia.

1.3 Radicales y exponentes fraccionarios

Sabemos lo que 2^n significa siempre que “n” sea un entero. Para dar significado a una potencia, por ejemplo $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional o fraccionario, se necesita estudiar radicales.

El símbolo $\sqrt{}$ significa “la raíz positiva de”.

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces “n”. La raíz “n” de “x” es el número que, cuando se eleva a la “n” potencia, dará “x”.

Definición de una raíz “n”.

Si “n” es cualquier entero positivo, entonces la raíz “n” principal de “a” se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad significa\ que \quad b^n = a$$

Si “n” es par, debemos tener a ≥ 0 y b ≥ 0.

Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \;\; porque \;\; 3^4 = 81 \;\; y \, 3 \; \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = \; -2 \;\; porque \;\; (-2)^3 = \; -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}\ y\ \sqrt[6]{-8}$ no están definidas, porque el cuadrado de todo número real es no negativo.

Tabla 3. Propiedades de las raíces n

Propiedades de las raíces “n”.

Propiedad.	Ejemplo.
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 * 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si “n” es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5,\ \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si “n” es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$

Para definir lo que significa un exponente racional, o bien lo que es lo mismo, un exponente fraccionario, como por ejemplo $a^{\frac{1}{3}}$, es necesario usar radicales. Para dar significado al símbolo $a^{\frac{1}{n}}$ de forma que sea consistente con las Leyes de los Exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\left(\frac{1}{n}\right)n} = a^1 = a$$

Entonces, por la definición de la raíz "n",

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

En general, definimos exponentes racionales como sigue:

Definición de exponentes racionales

Para cualquier exponente racional m/n en sus términos más elementales, donde m y n son enteros y n > 0, definimos

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces se requiere que a ≥ 0.

Ejemplos.-

1.- $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

2.- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

3.- $125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$

4.- $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{-\frac{4}{3}}$

Ejercicios propuestos

Escriba cada expresión radical usando exponentes, y cada expresión exponencial usando radicales.

Expresión radical	Expresión exponencial
$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
$\sqrt[3]{7^2}$	
	$4^{2/3}$
	$11^{-3/2}$
$\sqrt[5]{5^3}$	
	$2^{-1.5}$

Evalúe cada expresión

a) -3^2 b) $(-3)^2$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 (-3)^2$

Evalúe la expresión usando $x = 3, y = 4\ \ y\ \ z = -1$.

1) $\sqrt{x^2 + y^2}$ 2) $\sqrt{x^3 + 14y + 2z}$

Simplifique la expresión.

a) x^8x^2 b) $(3y^2)(4y^5)$ c) $\frac{a^9a^{-2}}{a}$

2. Operaciones fundamentales con polinomios

2.1. Definiciones

Una variable es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo *x*, *y* y *z* y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una expresión algebraica. Por ejemplo:

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un monomio es una expresión de la forma ax^k, donde "a" es un número real y "k" es un entero no negativo. Un binomio es una suma de monomios y un trinomio es suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama polinomio. Por ejemplo, la primera expresión de las citadas anteriormente es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

Polinomio

Un polinomio en la variable “x” es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y “n” es un número no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene grado “n”. Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de términos del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Tabla 4. Ejemplo de clasificación de polinomios.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	Cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3,\ x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomial	$9x^5$	5
6	monomial	6	0

2.1.1 Reglas de los signos

Consideraciones para el momento de realizar operaciones de multiplicación y división entre signos en operaciones algebraicas.

Tabla 5. Reglas de los signos.

Operación.	Resultado.
$(+) * (+)$ ó $(+)/(+)$	$(+)$
$(+) * (-)$ ó $(+)/(-)$	$(-)$
$(-) * (+)$ ó $(-)/(+)$	$(-)$
$(-) * (-)$ ó $(-)/(-)$	$(+)$

2.2 Operaciones fundamentales

2.2.1 Signos de agrupación

Los signos de agrupación son de 4 clases (Paréntesis), [Corchetes]. {Llaves} y el vínculo o $\overline{\text{Barra}}$. Estos signos se usan para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como una sola cantidad. Los corchetes, paréntesis, las llaves y las barras se pueden suprimir utilizando la propiedad distributiva o haciendo uso de las dos simples acciones siguientes (que es lo mismo):

1) Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo (+) se deja el mismo signo que tengan cada una de las cantidades que se hallan dentro de él.

$$a + (b - c) = a + b - c$$

2) Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo (-) se cambia el signo de cada una de las cantidades que se hallan dentro de él.

$$x - (-2y + z) = x + 2y - z$$

Ejercicios:

Simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

1) $2x + 3y - \overline{4x + 3y}$

2) $-(a + b) + (-a - b) - (-b + a) + (3a + b)$

3) $(-x + y) - \{4x + 2y + [-x - y - \overline{x + y}]\}$

2.2.2 Suma y resta

Para restar y sumar polinomios se utilizan las propiedades de los números reales. La idea es combinar términos semejantes (términos con las mismas variables elevadas a la misma potencia). Por ejemplo:

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

No olvidar lo que sucede cuando un signo menos precede a una expresión entre paréntesis. $-(b+c) = -b-c$

Ejemplos:

1) Encuentre la suma $(x^3-6x^2+2x+4)+(x^3+5x^2-7x)$

$= \quad (x^3+x^3)+(-6x^2+5x^2)+(2x-7x)+4$ *Agrupe términos semejantes.*

$= 2x^3-x^2-5x+4$ *Combine términos semejantes.*

2) Encuentre la diferencia $(x^3-6x^2+2x+4)-(x^3+5x^2-7x)$

$= x^3-6x^2+2x+4-x^3-5x^2+7x$ *Propiedad distributiva*

$= (x^3-x^3)+(-6x^2-5x^2)+(2x+7x)+4$ *Agrupe términos semejantes.*

$= -11x^2+9x+4$ *Combine términos semejantes.*

Ejercicios: Hallar la suma de

1) $-m-n-p; m+2n-5; 3p-6m+4; 2n+5m-$

2) $x^3+xy^2+y^3; 2x^3-4xy^3-5y^3$

3) $De\ la\ suma\ de\ x^4-6x^2y^2+y^4\ con\ 8x^2y^2+31y^4, restar\ x^4+2x^2y^2+32y^4$

2.2.3 Multiplicación

Para hallar el producto de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la propiedad distributiva. En particular, utilizándola tres veces en el producto de dos binomios se obtiene:

$$(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos esos productos.

En general, podemos multiplicar dos expresiones algebraicas usando para ello la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes.

Ejemplos:

1) Encuentre el producto: $(2x+3)(x^2-5x+4)$

Solución 1.- Usando la propiedad distributiva.

: $(2x+3)(x^2-5x+4) = 2x(x^2-5x+4) + 3(x^2-5x+4)$ *Propiedad distributiva.*

$= (2x * x^2 - 2x * 5x + 2x * 4) + (3 * x^2 - 3 * 5x + 3 * 4)$ *Propiedad distributiva.*

$= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12)$ *Leyes de los exponentes.*

$= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12$ *Combine términos.*

Solución 2. Usando forma de tabla

	x^2	$-5x$	$+4$	
		$2x$	$+3$	
	$3x^2$	$-15x$	$+12$	*Multiplique* $x^2 - 5x + 4\ por\ 3$
$2x^3$	$-10x^2$	$+8x$		*Multiplique* $x^2 - 5x + 4\ por\ 2x$
$2x^3$	$-7x^2$	$-7x$	$+12$	*Sume términos*

El siguiente ejemplo ilustra la división de un polinomio entre un monomio:

$$\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy}$$
$$= \frac{6x^2y^3}{2xy} + \frac{4x^3y^2}{2xy} - \frac{10xy}{2xy}\ \ divida\ cada\ término\ entre\ 2xy$$

$= 3xy^2 + 2x^2y - 5$ *Simplifique*

Ejercicios: Encuentre los productos.

1) $(x + 7)(x - 3)$ 2) $(a^2b^2 - 1)(a^2b^2 + 7)$ 3) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{7}{4}\right)$

4) $(m+3)^2$ 5) $(u-v)^3(u+v)^3$ 6) $(x+2y-z)^2(x-2y-z)^2$

3. Productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprendérselos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar multiplicaciones.

Tabla 6. Fórmulas de productos notables.

Fórmulas de productos notables.	
Si A y B son números reales cualquiera o expresiones algebraicas, entonces	
1. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$	Suma y producto de términos iguales.
2. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	Cuadrado de una suma.
3. $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	Cuadrado de una diferencia.
4. $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	Cubo de una suma.
5. $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	Cubo de una diferencia.

3.1 Suma y producto de términos iguales o binomio conjugado

1. $(a+4)(a-4)=(a)^2-(4)^2=\ a^2-16$

2. $(2x+3y)(2x-3y)=\ (2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$

3.2 Cuadrado de una suma de dos cantidades

1. $(x+4)^2=(x)^2+2(x)(4)+(4)^2=\ x^2+8x+16$

2. $(4a+5b^2)^2=(4a)^2+2(4a)(5b^2)+(5b^2)^2=16a^2+40ab^2+25b^4$

3.3 Cuadrado de la diferencia de dos cantidades

1. $(x-5)^2=\ (x)^2-2(x)(5)+(5)^2=x^2-10x+25$

2. $(4a^2-3ab^3)^2=(4a^2)^2-2(4a^2)(3ab^3)+(3ab^3)^2=16a^4-24a^3b^3+9a^2b^6$

3.4 Cubo de una suma

1. $(a+1)^3=(a)^3+3(a)^2(1)+3(a)(1)^2+(1)^3=a^3+3a^2+3a+1$

2. $(4x+5)^3=(4x)^3+3(4x)^2(5)+3(4x)(5)^2+(5)^3=64x^3+240x^2+300x+125$

3.5 Cubo de una diferencia

1. $(x-2)^3 = (x)^3 - 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 - (2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

2. $(x^2+3y)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(3y) + 3(x^2)(3y)^2 - (3y)^3 = x^6 - 9x^4y + 27x^2y^2 - 27y^3$

3.6 Multinomio elevado al cuadrado

Para analizar este caso, tomemos el multinomio $(a+b+c)$ y elevémoslo al cuadrado:

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$$

Esta multiplicación la podemos desarrollar término a término o por medio de productos notables mediante un reagrupamiento de términos:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = {} & (a+b)^2 + 2(a+b)(c) + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

“El cuadrado de un multinomio está formado por la suma de los cuadrados de cada uno de los términos, más la suma algebraica (es decir, considerando los signos) del doble producto del primer término por cada uno de los siguientes, más el doble producto del segundo término por cada uno de los siguientes, más el doble producto del tercero por cada uno de los siguientes y así sucesivamente hasta llegar al doble producto del penúltimo término por el último".

Ejemplo:

1. $(2a-b+3c)^2 = (2a)^2+(-b)^2+(3c)^2+2(2a)(-b)+2(2a)(3c)+2(-b)(3c)=4a^2+b^2+9c^2-4ab+12ac-6bc$

2. $(x-y+2z-3w)^2=(x)^2+(-y)^2+(2z)^2+(-3w)^2+2(x)(-y)+2(x)(2z)+2(x)(-3w)+2(-y)(2z)+2(-y)(-3w)+2(2z)(-3w)= x^2+y^2+4z^2+9w^2-2xy+4xz-6wx-4yz+6wy-12wz$

Ejercicios: Hallar por simple inspección los productos

a) $(6a+b)^2$ b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ c) $(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)$

d) $(x+1)(x+1)$ e) $3x(1-x)(1-x)$ f) $(a^2x+by^2)^2$

3.7 Binomio de Newton

La fórmula que nos permite hallar las potencias de un binomio se conoce como binomio de Newton.

$$(a\pm b)^n=\binom{n}{0}a^n\pm\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2\ldots\pm\binom{n}{n}b^n$$

Podemos observar que el número de términos es n+1.

Los coeficientes son números combinatorios que corresponden a la fila enésima del triángulo de Tartaglia.

$n = 0$									1								
$n = 1$								1		1							
$n = 2$							1		2		1						
$n = 3$						1		3		3		1					
$n = 4$					1		4		6		4		1				
$n = 5$				1		5		10		10		5		1			
$n = 6$			1		6		15		20		15		6		1		
$n = 7$		1		7		21		35		35		21		7		1	
$n = 8$	1		8		28		56		70		56		28		8		1

Ilustración 1. Triángulo de Tartaglia

En el desarrollo del binomio los exponentes de a van disminuyendo, de uno en uno, de n a cero; y los exponentes de b van aumentando, de uno en uno, de cero a n, de tal manera que la suma de los exponentes de a y de b en cada término es igual a n.

En el caso que uno de los términos del binomio sea negativo, se alternan los signos positivos y negativos.

Ejemplo:

1. $(x+2y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 2y + \binom{5}{2} x^3 (2y)^2 + \binom{5}{3} x^2 (2y)^3 + \binom{5}{4} x(2y)^4 + \binom{5}{5} (2y)^5$

$$(x+2y)^5 = x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$$

2. $(2-3y)^4 = \binom{4}{0} 2^4 - \binom{4}{1} 2^3 3y + \binom{4}{2} 2^2 (3y)^2 - \binom{4}{3} 2(3y)^3 + \binom{4}{4} (3y)^4$

$$(2-3y)^4 = 16 - 96y + 216y^2 - 216y^3 + 81y^4$$

Ejercicios: Eleve a las potencias indicadas utilizando el binomio de Newton.

a) $(y-2z)^5$ b) $(2m-3n)^4$ c) $(x+5y)^6$ d) $(a+b)^3$

4. Factorización de polinomios

Siempre se ha considerado a este tema como uno de los más importantes del álgebra. La razón de ello es que la factorización de expresiones algebraicas, son la base de la simplificación de las mismas. Ahora bien, si nosotros queremos aprender álgebra es absolutamente necesario que sepamos simplificar. Es por eso la importancia de este tema.

Factorizar consiste, como su nombre lo indica, en obtener factores y como factores son los elementos de una multiplicación, entonces factorizar es convertir una suma en una multiplicación indicada por sus factores. De acuerdo con lo anterior, el resultado de una factorización siempre será un producto.

Los factores de un término o monomio se pueden hallar por simple inspección. Así los factores de $15ab$ serán 3, 5, a y b. Por lo tanto:

$$15ab = 3 * 5 * a * b$$

Los coeficientes numéricos siempre se deben descomponer en números primos. Recordemos que los números primos son aquellos que solo son divisibles entre sí mismos y la unidad, por ejemplo, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, entre otros.

4.1 Factor común

1) Descomponer en factores: $a^2 + 2a$

Factorizando cada término: $a^2 = a * a \quad 2a = 2 * a$

Entonces: $a^2 + 2a = a * a + 2 * a$

Agrupando factores comunes: $a^2 + 2a = a(a + 2)$

2) Descomponer en factores: $10a^2 - 5a + 15a^3$

Factorizando términos: $10a^2 = 2 * 5 * a * a \quad 5a = 5 * a \quad 15a^3 = 3 * 5 * a * a * a$

Entonces: $10a^2 - 5a + 15a^3 = 2 * 5 * a * a - 5 * a + 5 * 3 * a * a * a$

Agrupando factores comunes: $10a^2 - 5a + 15a^3 = 5a(3a^2 + 2a - 1)$

3) Descomponer en factores: $x(a + b) + m(a + b)$

Solución:

$$x(a + b) + m(a + b) = (a + b)(x + m)$$

Factor común por agrupación de términos

En este caso, por medio de paréntesis, se agrupan términos que tengan algún factor común. De esos términos se sacan dicho factor común y se procura que los paréntesis que queden sean exactamente iguales, para que a su vez sean otro factor común que se pueda sacar.

Ejemplo: Descomponer $ax + bx + ay + by$

Solución 1.

$$x(a + b) + m(a + b) = (ax + bx) + (ay + by)$$

$$x(a + b) + m(a + b) = x(a + b) + y(a + b) = (a + b) + (x + y)$$

Solución 2.

$$x(a + b) + m(a + b) = (ax + ay) + (bx + by)$$

$$x(a + b) + m(a + b) = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

Factorizar $3m^2 - 6mn + 4m - 8n$

Solución.

$$3m^2 - 6mn + 4m - 8n = (3m^2 - 6mn) + (4m - 8n)$$

$$3m^2 - 6mn + 4m - 8n = 3m(m + 4) - 2n(3m + 4)$$

$$3m^2 - 6mn + 4m - 8n = (3m + 4)(m - 2n)$$

Ejercicios: Factorizar las siguientes expresiones

a) $25x^7 - 10x^5 + 15x^3 - 5x^2$ b) $a(x - 1) - (a + 2)(x - 1)$

c) $a^2 + 1 - b(a^2 + 1)$ d) $2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2$

4.2 Diferencia de cuadrados perfectos ($a^2 - b^2$)

En productos notables se vio que el resultado de multiplicar la suma de dos cantidades por su diferencia (binomios conjugados), nos da la diferencia de dos cuadrados, es decir, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, entonces, recíprocamente, podemos decir que toda la diferencia de cuadrados proviene de multiplicar binomios conjugados.

De acuerdo con lo anterior, para factorizar una diferencia de cuadrados:

Se extrae la raíz cuadrada del primer término y se le suma la raíz cuadrada del segundo y el resultado lo multiplicamos por la diferencia de las mismas raíces.

Ejemplos:

1.- Factorizar $1 - a^2$

Solución:

Raíz cuadrada de 1 …………………….1

Raíz cuadrada de a^2…………………….a

Por lo tanto $1 - a^2 = (1 + a)(1 - a)$

2.- Descomponer $16x^2 - 25y^4$

Solución:

Raíz cuadrada de $16x^2$…………………….$4x$

Raíz cuadrada de $25y^4$…………………….$5y^2$

Entonces $16x^2 - 25y^4 = (4x + 5y^2)(4x - 5y^2)$

Para poder factorizar algunas expresiones algebraicas, puede ser necesario factorizarla por partes, es decir, agrupar dentro de paréntesis los términos que satisfagan alguno de los casos ya expuestos y luego, factorizar las expresiones compuestas que resulten.

Ejemplo:

Descomponer $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

Solución: Agrupamos los tres primeros términos ya que forman un trinomio cuadrado perfecto:

$$a^2 + 2ab + b^2 - 1 = (a^2 + 2ab + b^2) - 1$$

Factorizamos el trinomio $= (a + b)^2 - 1$

Factorizamos la diferencia de cuadrados

$$= [(a + b) + 1][(a + b) - 1]$$

$$= (a + b + 1)(a + b - 1)$$

4.3 Trinomio cuadrado perfecto $(a^2 + 2ab + b^2)$

Una cantidad es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de otra cantidad, o sea, cuando es el producto de dos factores iguales. Así, $4a^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de 2a. En efecto: $(2a)^2 = (2a)(2a) = 4a^2$ y 2a, que multiplicada por sí misma es $4a^2$, es la raíz cuadrada de $4a^2$. Observe que $(-2a)^2 = (-2a)(-2a) = 4a^2$;

luego, -2a es también raíz cuadrada de $4a^2$. Lo anterior nos dice que la raíz cuadrada de una cantidad tiene dos signos, + y -. En este tema solo se hace referencia a la raíz cuadrada positiva.

Recuerde que para la extraer raíz cuadrada a un término, se extrae la raíz cuadrada al coeficiente numérico y se divide el exponente de cada letra entre 2. Por ejemplo, la raíz cuadrada de $36x^4y^6$ es $6x^2y^3$.

Un trinomio es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, el producto de dos binomios iguales. Así, $a^2 + 2ab + b^2$ es cuadrado perfecto porque es el resultado de $(a + b)^2$. De la misma manera como:

$$(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$$

Entonces, $4x^2 - 4xy + y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto: se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer término del trinomio y se separan estas raíces con el signo del segundo término. El binomio así formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

Ejemplos:

1. Factorizar $m^2 + 2m + 1$

Solución:

Raíz cuadrada de m^2………………..m

Raíz cuadrada de 1………………….1

Doble producto de estas raíces…….2(m)(1) = 2m

Con lo anterior se demuestra que el trinomio es cuadrado perfecto, y por lo tanto, de acuerdo a la regla:

$$m^2 + 2m + 1 = (m + 1)(m + 1) = (m + 1)^2$$

2. Descomponer en factores $4x^2 - 20xy + 25y^2$

Solución:

Raíz cuadrada de $4x^2$……………..……..2x

Raíz cuadrada de $25y^2$………………….5y

Doble producto de estas raíces…….2(2x)(5y) = 20xy

Con lo anterior se demuestra que el trinomio es cuadrado perfecto, y por lo tanto, de acuerdo a la regla:

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x - 5y)^2$$

Ejercicios: Factoriza las siguientes expresiones

a) $a^2 - 10a + 25$ b) $(x + 1)^2 - 4x^2$ c) $4x^{2n} - \frac{1}{9}$

d) $\frac{a^2}{36} - \frac{x^6}{25}$ e) $36 + 12m^2 + m^4$ f) $x^2 - (y - x)^2$

4.4 Suma o diferencia de cubos perfectos

Recordando el caso de los productos notables:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

De aquí se ve que, una suma o una diferencia de cubos, proviene de multiplicar a un binomio por un trinomio.

Que el binomio está formado por la raíz cúbica del primer término, más o menos, la raíz cúbica del segundo término y que el trinomio es el cuadrado del primer término del binomio menos el producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo término. De acuerdo con lo anterior, podemos establecer que:

Una suma o una diferencia de cubos se descompone en dos factores: un binomio y un trinomio. El binomio se forma con la suma o la diferencia de las raíces cúbicas de los términos de la expresión, según sea ésta, es decir, se la expresión es una suma, en el binomio tendremos también una suma y sí la expresión es una resta, en el binomio tendremos una resta. Una vez establecido este binomio, lo tomamos como base para la formación del trinomio escribiendo el cuadrado del primer término, el signo contrario, el producto de los dos términos más el cuadrado del segundo término.

Ejemplos:

Factorizar: $x^3 + 1$

Solución: Recuerde que para extraer raíz cúbica a un término se divide el exponente entre 3. La raíz cúbica de x^3 es x y la raíz cúbica de 1 es 1. Por lo tanto:

$$x^3 + 1 = (x + 1)[(x)^2 - x(1) + (1)^2] = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Descomponer: $a^3 - 8$

Solución: La raíz cúbica de a^3 es a y la raíz cúbica de 8 es 2, por lo tanto:

$$a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$$

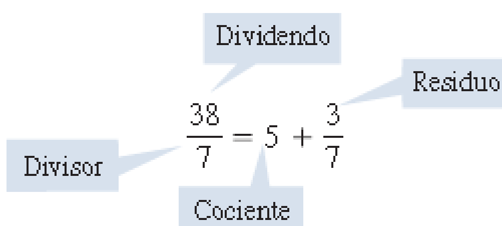
Ejercicios: Factorizar las siguientes expresiones

1) $y^3 + 1$ 2) $8x^3 + y^3$ 3) $(x + 2y)^3 + 1$

4) $a^3 - 1$ 5) $(x - y)^3 - 8$ 6) $a^3 - 125$

4.5 División

La división de polinomios es muy semejante al conocido proceso de dividir números. Cuando dividimos 38 entre 7, el cociente es 5 y el residuo es 3. Escribimos



Para dividir polinomios, usamos división larga, como sigue.

Algoritmo de división

Si P(x) y D(x) son funciones polinomiales, con D(x) diferente de cero, entonces existen polinomiales únicas Q(x) y R(x), donde R(x) es 0 o de grado menor al grado de D(x), de modo que

$$P(x) = D(x) * Q(x) + R(x)$$

Las funciones polinomiales P(x) y D(x) se denominan dividendo y divisor, respectivamente, Q(x) es el cociente, y R(x) es el residuo.

Ejemplo: Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$.

Solución: El dividendo es $6x^2 - 26x + 12$ y el divisor es $x - 4$. Empezamos por acomodarlos como sigue:

$$x - 4 \overline{\big) 6x^2 - 26x + 12}$$

A continuación dividimos el término principal del dividendo entre el término principal del divisor para obtener el primer término del cociente: $\frac{6x^2}{x} = 6x$. Enseguida multiplicamos el divisor por $6x$ y restamos el resultado del dividendo.

$$\begin{array}{rl} & 6x \\ x - 4 & \overline{\big) 6x^2 - 26x + 12} \\ & \underline{6x^2 - 24x} \\ & \qquad -2x + 12 \end{array}$$

Divida términos principales: $\frac{6x^2}{x} = 6x$

Multiplique: $6x(x - 4) = 6x^2 - 24x$

Reste y "baje" 12

Repetimos el proceso usando el último renglón $-2x+12$ como dividendo

$$\begin{array}{r|l} & 6x^2 - 2 \\ \hline x - 4 & 6x^2 - 26x + 12 \\ & \underline{6x^2 - 24x} \\ & \quad\quad -2x + 12 \\ & \quad\quad \underline{-2x + \ \ 8} \\ & \quad\quad\quad\quad\quad 4 \end{array}$$

Divida términos principales: $\dfrac{-2x}{x} = -2$

Multiplique: $-2(x-4) = -2x+8$

Reste

El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. El último renglón que contenga el residuo, y el renglón superior contienen el cociente. El resultado de la división puede interpretarse en cualquiera de dos formas.

$$\frac{\overbrace{6x^2 - 26x + 12}^{\text{Dividendo}}}{\underbrace{x - 4}_{\text{Divisor}}} = \overbrace{6x - 2}^{\text{Cociente}} + \frac{\overbrace{4}^{\text{Residuo}}}{x - 4}$$

$$\underbrace{6x^2 - 26x + 12}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x - 4)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(6x - 2)}_{\text{Cociente}} + \overbrace{4}^{\text{Residuo}}$$

Sean $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 \quad y \quad D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre polinomiales $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = D(x) * Q(x) + R(x)$.

Solución: Usamos división larga después de insertar primero el término $0x^3$ en el dividendo para asegurar que las columnas queden alineadas correctamente.

$$\begin{array}{rlll}
 & 4x^2 + 2x & & \\
2x^2 - x + 2 \,\big) & \overline{8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1} & & \\
 & \underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} & & \text{Multiplique el divisor por } 4x^2 \\
 & \qquad\quad 4x^3 - 2x^2 - 3x & & \text{Reste} \\
 & \qquad\quad \underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} & & \text{Multiplique el divisor por } 2x \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad -7x + 1 & & \text{Reste}
\end{array}$$

El proceso se completa en este punto porque $-7x + 1$ es de menor grado que el divisor $2x^2 - x + 2$. De la división larga de líneas antes vemos que $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$, de modo que

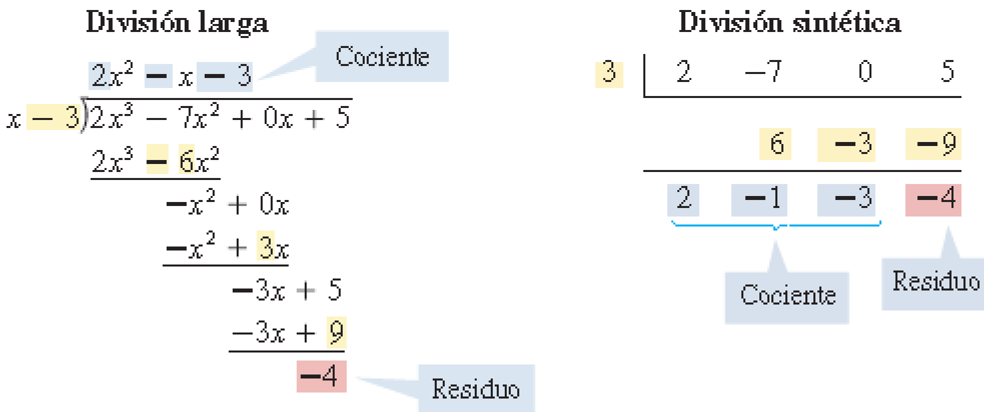
$$8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1)$$

Ejercicios, resuelva las divisiones:

a) $P(x) = 3x^2 + 5x - 4,\ D(x) = x + 3$ b) $\frac{x^3+6x+3}{x^2-2x+2}$

4.6 División sintética

La división sintética es un método rápido de dividir polinomios; se puede usar cuando el divisor es de la forma $x - c$. En división sintética sólo escribimos las partes esenciales de la división larga. Compare las siguientes divisiones larga y sintética, en las que dividimos $2x^3 - 7x^2 + 5\ entre\ x - 3$.

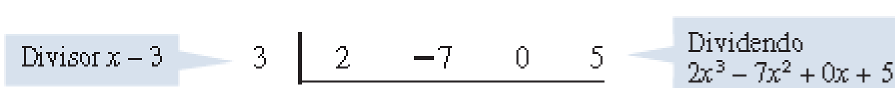


Observe que en la división sintética abreviamos $2x^3 - 7x^2 + 5$ al escribir sólo los coeficientes: 2, -7, 0, 5 y en lugar de $x - 3$ escribimos simplemente 3. El siguiente ejemplo muestra cómo se realiza la división sintética.

Ejemplo: División sintética.

Use división sintética para dividir $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$.

Solución: Empezamos por escribir os coeficientes apropiados para representar el divisor y el dividendo.



Bajamos el 2, multiplicamos $3 * 2 = 6$ y escribimos el resultado en el renglón de en medio. A continuación sumamos.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline & & 6 & & \\ \hline & \boxed{2} & -1 & & \end{array}$$

Multiplique: $3 \cdot 2 = 6$

Sume: $-7 + 6 = -1$

Repetimos este proceso de multiplicar y luego sumar hasta completar la tabla.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline & & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & \boxed{-1} & -3 & \end{array}$$

Multiplique: $3(-1) = -3$

Sume: $0 + (-3) = -3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{-3} & -4 \end{array}$$

Multiplique: $3(-3) = -9$

Sume: $5 + (-9) = -4$

Cociente
$2x^2 - x - 3$

Residuo
-4

Del último renglón de la división sintética vemos que el cociente es $2x^2 - x - 3$ y el residuo es -4. Por lo tanto,

$$2x^3 - 7x^2 + 5 = (x - 3)(2x^2 - x - 3) - 4$$

Ejercicios: Resuelva mediante división sintética

a) $\frac{x^3+2x^2+2x+1}{x+2}$ b) $4x^2 + 12x + 5 \ entre \ x - 3$

5. Operaciones fundamentales con expresiones racionales

Una expresión fraccionaria es un cociente de dos expresiones algebraicas. Como caso especial, una expresión racional es un cociente p/q de dos polinomios p y q. Como la división entre cero no está permitida, el dominio de p/q está formado por todos los números reales excepto los que hagan que el denominador sea cero. Dos ilustraciones se dan en la tabla siguiente.

Tabla 7. Expresiones racionales.

Cociente	El denominador es cero si	Dominio
$\frac{6x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$	$x = \pm 3$	Toda $x \neq \pm 3$
$\frac{x^3 - 3x^2y + 4y^2}{y - x^3}$	$y = x^3$	Toda x y *y* tales que $y \neq x^3$

Cuando hablamos de expresiones racionales la siguiente propiedad es de particular importancia.

$$\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} * \frac{d}{d} = \frac{a}{b} * 1 = \frac{a}{b}$$

A veces describimos este proceso de simplificación al decir que un factor común diferente de cero en el denominador y numerador de un cociente se pueden cancelar. En la práctica, por lo general se muestra esta cancelación por medio de una diagonal sobre el factor común.

5.1 Reducción de fracciones

Una expresión racional se simplifica o se reduce a su máxima expresión, si el numerador y denominador no tienen como factores comunes polinomios de grado positivo y no hay factores comunes enteros mayores a 1. Para simplificar una expresión racional, factorizamos numerador y denominador entre factores primos y luego, suponiendo que los factores del denominador no son cero, cancelamos factores comunes.

$$\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b} \qquad \frac{mn}{npq}=\frac{m}{pq} \qquad \frac{pqr}{rpv}=\frac{q}{v}$$

Expresiones racionales simplificadas:

$$\frac{3x^2-5x-2}{x^2-4}=\frac{(3x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{3x+1}{x+2} \qquad Sí\ x\neq 2$$

$$\frac{2-x-3x^2}{6x^2-x-2}=-\frac{(3x^2+x-2)}{6x^2-x-2}=-\frac{(3x-2)(x+1)}{(3x-2)(2x+1)}$$

$$=-\frac{x+1}{2x+1} \quad Sí\ x\neq\frac{2}{3}$$

$$\frac{(x^2+8x+16)(x-5)}{(x^2-5x)(x^2-16)}=\frac{(x+4)^2(x-5)}{x(x-5)(x+4)(x-4)}=\frac{x+4}{x(x-4)} \quad Sí\ x \neq 5, x \neq -4$$

5.2 Multiplicación y división de fracciones

Cuando se simplifica un producto o cociente de expresiones racionales, con frecuencia usamos propiedades de cocientes para obtener una expresión racional. A continuación factorizamos el numerador y denominador y cancelamos factores comunes, como se hizo anteriormente.

Efectúe la operación indicada y simplifique:

1. $\frac{x^2-6x+9}{x^2-1}*\frac{2x-2}{x-3}$

$$=\frac{(x^2-6x+9)(2x-2)}{(x^2-1)(x-3)} \quad Propiedad\ de\ los\ cocientes$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-1}*\frac{2x-2}{x-3}$$

$$=\frac{(x-3)^2*2(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-3)} \quad Factorizar\ los\ polinomios$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2-1}*\frac{2x-2}{x-3}=\frac{2(x-3)}{x+1} \quad Sí\ x \neq 3, x \neq 1;\ Cancelar\ factores\ comunes$$

2. $\dfrac{x+2}{2x-3} \div \dfrac{x^2-4}{2x^2-3x}$

$$= \frac{x+2}{2x-3} * \frac{2x^2-3x}{x^2-4} \qquad \textit{Propiedad de cocientes}$$

$$\frac{x+2}{2x-3} \div \frac{x^2-4}{2x^2-3x}$$
$$= \frac{(x+2)x(2x-3)}{(2x-3)(x+2)(x-2)} \ \textit{propiedad de cocientes y factorizar}$$

$$\frac{x+2}{2x-3} \div \frac{x^2-4}{2x^2-3x} = \frac{x}{x-2} \ \text{Sí}\ x \neq -2, x \neq \frac{3}{2}; \textit{cancele factores comunes}$$

Ejercicios: Realice las operaciones que se le indican

1) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$ 2) $\frac{x^2-2x-15}{x^2-9} * \frac{x+3}{x-5}$ 3) $\frac{x+3}{4x^2-9} \div (\frac{x^2+7x+12}{2x^2+7x-15}$

5.3 Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar dos expresiones racionales, por lo general encontramos un denominador común y usamos las siguientes propiedades de cocientes:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d} \qquad y \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{d}$$

Si los denominadores de las expresiones no son iguales, podemos obtener un común denominador al multiplicar el numerador y denominador se cada fracción por una expresión apropiada. Generalmente empleamos el mínimo común denominador (mcd) de los cocientes. Para halla el mcd, factorizamos cada denominador en primos y luego formamos el producto de los factores primos diferentes, usando el máximo exponente que aparezca con cada actor primo. Empecemos con un ejemplo numérico de esta técnica.

Suma de fracciones usando el mcd.

Exprese como número racional simplificado:

$$\frac{7}{24}+\frac{5}{18}$$

Solución.- Las factorizaciones en primos de los denominadores 24 y 18 son $24 = 2^3 * 3$ y $18 = 2 * 3^2$. Para hallar el mcd, formamos el producto de los factores primos diferentes, usando el máximo exponente asociado con cada factor. Esto nos da $2^3 * 3^2$. Ahora cambiamos cada fracción a una fracción equivalente con denominador $2^3 * 3^2$ y sumamos.

$$\frac{7}{24}+\frac{5}{18}= \frac{7}{2^3*3}+\frac{5}{2*3^2}=\frac{7}{2^3*3}*\frac{3}{3}+\frac{5}{2*3^2}*\frac{2^2}{2^2}$$

$$\frac{7}{24}+\frac{5}{18}=\frac{21}{2^3*3^2}+\frac{20}{2^3*3^2}=\frac{41}{2^3*3^2}=\frac{41}{72}$$

Efectúe las operaciones y simplifique:

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}$$

Los denominadores ya están en forma factorizada. El mcd es $x^2(3x-2)$. Para obtener tres cocientes que tengan el denominador $x^2(3x-2)$, multiplicamos por x el numerador y denominador del primer cociente, los del segundo por x^2 y los del tercer por $3x-2$, lo cual nos da

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}=\frac{6}{x(3x-2)}*\frac{x}{x}+\frac{5}{3x-2}*\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}*\frac{3x-2}{3x-2}$$

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}=\frac{6x}{x^2(3x-2)}+\frac{5x^2}{x^2(3x-2)}-\frac{2(3x-2)}{x^2(3x-2)}$$

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}=\frac{6x+5x^2-2(3x-2)}{x^2(3x-2)}$$

$$\frac{6}{x(3x-2)}+\frac{5}{3x-2}-\frac{2}{x^2}=\frac{5x^2+4}{x^2(3x-2)}$$

Ejercicios: Realizar la suma de fracciones

1) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-3}$ 2) $\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x+1}$ 3) $\frac{2}{a^2}-\frac{3}{ab}+\frac{4}{b^2}$

43 y 45

5.4 Fracciones complejas

Una fracción compleja es un cociente en el que el numerador y/o el denominador es una expresión fraccionaria. Ciertos problemas en cálculo requieren simplificar fracciones complejas del tipo dado en el siguiente ejemplo.

Simplifique la fracción compleja: $\frac{\frac{2}{x+3}-\frac{2}{a+3}}{x-a}$

Solución. Cambiamos el numerador de la expresión dada en un solo cociente y luego usamos una propiedad para simplificar los cocientes:

$\frac{\frac{2}{x+3}-\frac{2}{a+3}}{x-a} = \frac{\frac{2(a+3)-2(x+3)}{(x+3)(a+3)}}{x-a}$ Combine fracciones en el numerador.

$\frac{\frac{2}{x+3}-\frac{2}{a+3}}{x-a} = \frac{2a-2x}{(x+3)(a+3)} * \frac{1}{x-a}$ Simplifique, propiedad de cocientes.

$\frac{\frac{2}{x+3}-\frac{2}{a+3}}{x-a} = \frac{2(a-x)}{(x+3)(a+3)(x-a)}$ Factorice 2a-2x; propiedad de cocientes.

$\frac{\frac{2}{x+3}-\frac{2}{a+3}}{x-a} = \frac{2}{(x+3)(a+3)}$ Sí x ≠ a, sustituya $\frac{a-x}{x-a}$ con -1

Un método alternativo es multiplicar por (x+3)(a+3) el numerador y denominador de la expresión dada, el mcd del numerador y denominador y luego simplificar el resultado.

Ejercicios: Realice las operaciones que se le indican y simplifique

1) $\frac{x+\frac{1}{x+2}}{x-\left(\frac{1}{x+2}\right)}$ 2) $\frac{\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-3}{x-2}}{x+2}$

3) $\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{1+x}}{h}$ 4) $2(1+x)^{\frac{1}{2}}-x(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

5.5 Racionalización de un cociente

Algunos cocientes que no son expresiones racionales contienen denominadores de la forma $a+\sqrt{b}\ o\ \sqrt{a}+\sqrt{b}$; como en el siguiente ejemplo, estos cocientes se pueden simplificar al multiplicar el numerador y denominador por el conjugado $a-\sqrt{b}$ ó $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, respectivamente. Desde luego, si aparece $a-\sqrt{b}$, multiplique entonces por $a+\sqrt{b}$.

Racionalice el denominador:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}*\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\ multiplique\ por\ el\ conjugado\ de\ \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} \quad \mathit{Propiedad\ de\ cocientes\ y\ diferencia\ de\ cuadrados}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} \qquad \mathit{ley\ de\ radicales}$$

En cálculo, a veces es necesario racionalizar del numerador de un cociente, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Racionalice el numerador, si h ≠ 0.

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Solución

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} * \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ Multiplique por el conjugado de $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ Propiedad de cocientes y diferencia de cuadrados

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ Ley de los radicales

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ Simplifique

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ Cancele h ≠ 0

Puede parecer como si hubiéramos hecho muy poco, porque hay radicales en el denominador. En cálculo, no obstante, es de interés determinar lo que es verdadero si h es muy cercana a cero. Nótese que si usamos la expresión dada obtenemos lo siguiente:

Si $h \approx 0$, entonces $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \approx \frac{\sqrt{x+0}-\sqrt{x}}{0} = \frac{0}{0}$,

que es una expresión sin sentido, pero si usamos la forma racionalizada obtenemos la siguiente información:

Si $h \approx 0$, entonces $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \approx \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

Ejercicios: Racionalice el denominador

1) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ 2) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ 3) $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ 5) $\frac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$

6. Logaritmos

6.1 Definiciones

En la proposición:

$$2^3 = 8$$

el término exponente se usa para indicar la relación que existe entre el 2 y el 3. Sin embargo, el 3 también está relacionado con el 8 y para indicar ésta relación se usa el término logaritmo. En otras palabras, el 3 es el exponente del 2 y además es el logaritmo de 8, o con mayor precisión, logaritmo base 2 de 8. El logaritmo se puede utilizar para resolver ciertos tipos de ecuaciones que no se pueden resolver por métodos más elementales.

"El logaritmo de un número positivo N en base b, positivo y distinto de la unidad, es el exponente "x" a que hay que elevar la base para obtener dicho número".

La forma abreviada de esta proposición es el logaritmo de base b de N es x o bien; $\log_b N = x$. Si usamos esta notación, la definición se puede expresar simbólicamente como sigue:

$\log_b N = x$ implica que

$$b^x = N$$

La siguiente tabla suministra varios ejemplos específicos de la equivalencia entre estas dos formas. En cada caso, la expresión en la forma logarítmica, a la izquierda, es equivalente a la que aparece en la columna de la derecha.

Tabla 8. Ejemplos de logaritmos.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_b N = x$	$b^x = N$
$\log_5 25 = 2$	$5^2 = 25$
$\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$	$27^{2/3} = 9$
$\log_6 \frac{1}{36} = -2$	$6^{-2} = \frac{1}{36}$
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$

De las formas $\log_b N = x$ y $b^x = N$, generalmente es más fácil trabajar con la forma exponencial. Por ejemplo para calcular el valor de $\log_9 27 = x$, escribimos:

$$\log_9 27 = x$$

Luego, lo convertimos a forma exponencial: $9^x = 27$

Para resolver esta ecuación exponencial, escribimos cada lado de la igualdad usando la misma base. Es decir, como $3^3 = 27$ y $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$, tenemos:

$3^{2x} = 3^3$

$2x = 3$ Si las bases son iguales entonces, los exponentes también lo son.

$x = \frac{3}{2}$

Los sistemas logarítmicos utilizados generalmente son dos: el sistema de logaritmos comunes o vulgares o de Briggs, cuya base es 10, y el sistema de logaritmos naturales o neperianos, creados por Neper, cuya base es inconmensurable:

$$e = 2.71828182845 \ldots\ldots\ldots$$

Este número e, al igual que el número π, tiene un cierto significado matemático que, en detalle, se analizan en cursos posteriores de cálculo. Cuando no se indica la base del logaritmo y solo se indica con el prefijo “log” generalmente se supone una base 10. En cambio a los logaritmos base e o logaritmos naturales se representan por “ln”. Simbólicamente:

$$\log_{10} x = \log x \qquad \text{y} \qquad \log_e x = \ln x$$

Por lo que para expresar un logaritmo natural en forma exponencial, queda de la siguiente manera:

$$\log_e N = x \qquad \ln N = x \qquad e^x = N$$

6.2 Propiedades de los logaritmos

Existen tres propiedades de los logaritmos, y son de suma importancia. Estas se presentan a continuación:

“El logaritmo del producto de dos o más números es igual a la suma de los logaritmos de los números”

$$\log_b MNP = m + n + p = \log_b M + \log_b N + \log_b P$$

“El logaritmo del cociente de dos números es igual al dividendo menos el logaritmo del divisor”

$$\log_b \frac{M}{N} = \frac{b^m}{b^n} = \log_b M - \log_b N$$

"El logaritmo de la potencia de un número es igual al producto del exponente de la potencia por el logaritmo del número”.

$$\log_b M^k = km = k\log_b M$$

Ejercicios:

Evalúe la expresión:

a) $\log_3 \sqrt{27}$ b) $\log 4 + \log 25$ c) $\log_4 192 - \log_4 3$

Use las leyes de los logaritmos para expandir la expresión:

d) $\log_2 2x$ e) $\log_2(x(x-1))$ f) $\log(\frac{x^3y^4}{z^6})$

Use las leyes de los logaritmos para combinar la expresión:

g) $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C$

h) $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

7. Solución de ecuaciones

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales, por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que se estudian en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

la letra x es la variable. Consideramos x como la “incógnita” de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan soluciones o raíces de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama resolver la ecuación.

Una ecuación lineal en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

Ejemplo: Solución de una ecuación lineal.-

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$

Solución. Se resuelve al cambiar una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable x en un lado y todos los términos constante en el otro.

$7x - 4 = 3x + 8$	Ecuación dada
$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4$	Sume 4
$7x = 3x + 12$	Simplifique
$7x - 3x = (3x + 12) - 3x$	Reste 3x
$4x = 12$	Simplifique
$\left(\frac{1}{4}\right) * (4x) = \left(\frac{1}{4}\right) * 12$	Multilique por $\frac{1}{4}$
$x = 3$	Simplifique

Verifique su respuesta

$$x = 3; \quad LI = 7(3) - 4 = 17; \quad LD = 3(3) + 8 = 17;$$

$LI = LD$ La solución es correcta.

7.1 Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o como $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como $x^2 + 2x - 3 = 0$ o $2x^2 + 3 = 5x$.

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades de números reales.

Propiedad de producto cero.

$AB = 0$ si y sólo si $A = 0$ o $B = 0$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a cero cada factor a la vez. Este método solo funciona cuando el lado derecho de la ecuación es 0.

7.1.1 Gráfica de $Y = X^2$

La siguiente tabla de valores nos da varios pares ordenados de números que son las coordenadas de algunos puntos que aparecen en la gráfica $y = x^2 - 2$.

Tabla 9. Tabla de valores.

x	$y = x^2 - 2$	(x, y)
-3	7	$(-3, 7)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	-2	$(0, -2)$
1	-1	$(1, -1)$
2	2	$(2, 2)$
3	7	$(3, 7)$

Cuando estos puntos se localizan en un sistema de coordenadas rectangulares y se unen por medio de una curva plana, se obtiene la gráfica de $y = x^2 - 2$. A esta curva se le llama parábola y cada relación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, tiene como gráfica a una de estas parábolas. Los valores que podemos asignar a x, en esta relación, es el conjunto de todos los números reales. Los valores de y, dependen de las constantes a, b y c. Para la relación $y = x^2 - 2$, los valores de y consisten en todas las $y > -2$.

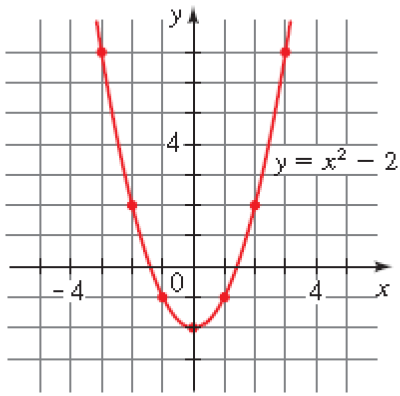


Ilustración 2. Gráfica de la ecuación cuadrática (Parábola)

Una característica importante de la parábola como ésta, consiste en que es simétrica respecto de la recta vertical llamada su eje de simetría. La gráfica de $y = x^2 - 2$ es simétrica respecto del eje y. Ésta simetría se debe al hecho de que $(-x)^2 = x^2$. La parábola tiene un punto, llamado vértice, que se localiza en la intersección de la propia parábola con su eje de simetría. En ña gráfica anterior, las coordenadas del vértice son (0,-2), y es precisamente -2 el valor mínimo de la ecuación, cuando x=0. En la gráfica, se puede ver que, al seguirla de izquierda a derecha, la curva está “cayendo” hacia el origen y se está “elevando” después. Estas características se describen técnicamente como decrecientes y crecientes. Sí el coeficiente de x^2 es negativo, -2, la parábola se invierte en vez de estar en el I y II cuadrante del plano se refleja hacia el III y IV cuadrante del plano, quedando el vértice en el mismo punto pero tendería hacia $-\infty$ en el eje de simetría y.

Otra forma en que se encuentran representadas las ecuaciones cuadráticas es de la siguiente forma general

$y = a(x - h)^2 + k$ la cual es congruente con la forma general más básica $y = ax^2$, pero está desplazada h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

a) El desplazamiento horizontal tiene lugar hacia la derecha, si $h > 0$, y hacia la izquierda si $h < 0$.

b) El desplazamiento vertical es hacia arriba si $k > 0$, y hacia abajo si $k < 0$.

El eje de simetría tiene la ecuación x = h, el vértice está en (h,k) y k es un valor máximo o mínimo.

a) Si a<0, la parábola se abre hacia abajo y k es el valor máximo.

b) Si a>0, la parábola se abre hacia arriba y k es el valor mínimo.

Ejercicios: Trace cada la gráfica de cada ecuación y compárela con las demás y las características antes mencionadas.

a) $y = x^2$ b) $y = (x + 1)^2$ c) $y = (x + 1)^2 - 3$

d) $y = -x^2$ e) $y = -(x + 1)^2$ f) $y = -(x + 1)^2 - 3$

7.1.2 Complementación del cuadrado

Cuando la gráfica de una parábola se representa por una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$, a la cual llamamos forma general de la ecuación de la parábola, las propiedades de la gráfica no son evidentes, es decir, no sabemos dónde está el vértice o que tanto cierra o abre, etc. No obstante, si la ecuación la transformamos a la forma ordinaria, representada por: $y = a(x-h)^2 + k$, es posible aplicar los métodos para trazar la gráfica antes descrita. Aquí el objetivo consiste en aprender a realizar esta conversión algebraica.

Comencemos con la ecuación $y = x^2 + 4x + 3$. En primer lugar, escribamos nuevamente la ecuación de esta manera:

$$y = (x^2 + 4x + ?\,) + 3$$

Notamos que si el signo de interrogación lo sustituimos por 4, obtenemos un trinomio cuadrado perfecto dentro del paréntesis. Sin embargo como esto modifica la ecuación original, también debemos de restar 4. El trabajo ya terminado quedaría así:

$$y = x^2 + 4x + 3$$

$$y = (x^2 + 4x + 4) + 3 - 4$$

$$y = (x+2)^2 - 1$$

Viendo la ecuación de esta forma, debemos de reconocer que representa a una parábola con vértice en (-2,-1) y con $x = -2$ como ecuación de eje de simetría.}

La técnica que se acaba de aplicar se llama Complementación del Cuadrado. El proceso de complementación del cuadrado aprovecha una de estas identidades:

$$(x+k)^2 = x^2 + 2xh + h^2 \qquad (x-h)^2 = x^2 - 2xh + h^2$$

En estos trinomios h^2es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término sonde aparece x (sin considerar el signo). O sea, el tercer término es igual a:

$$\left[\frac{1}{2}(2h)\right]^2 = h^2$$

Ejemplos:

$x^2 + 8x + ?$ ➔ $x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ ➔ $\left[\frac{1}{2}(8)\right]^2 = 4^2 = 16$

$x^2 - 3x + ?$ ➔ $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left[x - \frac{3}{2}\right]^2$ ➔ $\left[\frac{1}{2}(3)\right]^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$x^2 + \frac{b}{a}x + ?$ ➔ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left[x + \frac{b}{2a}\right]^2$ ➔ $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2 = \left[\frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Este proceso de complementación del cuadrado se puede ampliar al caso en el que el coeficiente de x^2 sea un número diferente de 1. Tomaremos en consideración la ecuación $y = 2x^2 - 12x + 11$. El primer paso consiste en factorizar el coeficiente de x^2 únicamente en los términos que contienen a la variable.

$$y = 2x^2 - 12x + 11$$

$$y = 2(x^2 - 6x + ?) + 11$$

A continuación agregamos 9 dentro de los paréntesis para formar el cuadrado perfecto $x^2 - 6x + 9$. Sin embargo, debido al coeficiente colocado antes del paréntesis en realidad estamos agregando $2 * 9 = 18$; por lo tanto, también debemos restar 18.

$$y = 2(x^2 - 6x + 9) + 11 - 18$$

$$y = 2(x^2 - 6x + 9) - 7$$

Se trata de una parábola que abre hacia arriba con el vértice en $(3, -7)$; $x = 3$ es la ecuación del eje de simetría.

Ejemplo:

Convierta $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$ a la forma ordinaria.

$$y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{3}(x^2 + 6x) + 1$$

$$y = -\frac{1}{3}(x^2 + 6x + 9) + 1 + 3$$

$$y = -\frac{1}{3}(x^2 + 6x + 9) + 4$$

La gráfica es una parábola que abre hacia abajo, con vértice en $(-3,4)$ y con $x = -3$ como ecuación del eje de simetría.

Ejercicios:

Complemente el cuadrado perfecto

a) $y = x^2 + 8x +$ ______ b) $y = x^2 + 3x +$ _____ c) $y = x^2 - 5x +$ ____

Escriba en la forma ordinaria: $y = a(x-h)^2 + k$

$d)\ y = x^2 + 4x - 3$ e) $y = -x^2 + x - 2$

f) $y = x^2 - 2x + 9$

7.2 Métodos de solución

7.2.1 Factorización

Resuelva la ecuación $3x^2 = 10 - x$

Solución.- Para usar le método de factorización, es esencial que sólo el número 0 aparezca en un lado de la ecuación. Así, procederemos como sigue:

$3x^2 = 10 - x$ enunciado

$3x^2 + x - 10 = 0$ Sumar $x - 10$

$(3x-5)(x+2) = 0$ factorizar

$3x - 5 = 0,\ x + 2 = 0$ teorema del factor cero

$x = \frac{5}{3}\ ,\ x = -2$ despejar x

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son $\frac{5}{3}$ $y - 2$.

Resuelva la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

$x^2 + 16 = 8x$	enunciado
$x^2 - 8x + 16 = 0$	restar 8x
$(x - 4)(x - 4) = 0$	factorizar
$x - 4 = 0,\ x - 4 = 0$	teorema del factor cero
$x = 4,\ \ x = 4$	despejar x

Por lo tanto, la ecuación cuadrática dada tiene una solución, 4.

Como $x - 4$ aparece como factor dos veces en la solución previa, a 4 lo llamamos raíz doble o raíz de multiplicidad 2 de la ecuación $x^2 + 16 = 8x$.

Si una ecuación cuadrática tiene la forma $x^2 = d$ para algún número d > 0, entonces $x^2 - d = 0$ 0, lo que es equivalente,

$$\left(x + \sqrt{d}\right)\left(x - \sqrt{d}\right) = 0.$$

Al igualar a cero cada factor nos da las soluciones $-\sqrt{d}$ y $\sqrt{d}$. Con frecuencia usamos el símbolo $\pm\sqrt{d}$ (más o menos $\sqrt{d}$) para representar $\sqrt{d}$ y $-\sqrt{d}$. Entonces, para $d > 0$, hemos demostrado el siguiente resultado.

$$si\ x^2 = d, entonces\ \ x = \pm\sqrt{d}.$$

Ejercicios: Resuelva usando el método de factorización

1) $3x^2 + 5x = 0$ 2) $x^2 + 8x + 15 = 0$

3) $y^2 - 2y - 3 = y - 3$ 4) $2m^2 - 11m - 6 = 0$

7.2.2 Formando un trinomio cuadrado perfecto

Para completar el cuadrado para $x^2 + kx\ o\ x^2 - kx$, sumamos $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; esto es, sumar el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

(1) $x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$

(2) $x^2 - kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$

Ejemplos:

Determine el valor o valores de *d* que completen el cuadrado para cada expresión. Escriba el Trinomio y el cuadrado del binomio que representa.

(a) $x^2 - 3x + d$ (b) $x^2 + dx + 64$

(a) Solución: El cuadrado de la mitad del coeficiente es $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)$ y

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

(b) Si $](x + c)^2 = x^2 + dx + 64$, entonces $x^2 + 2cx + c^2 = x^2 + dx + 64$, de modo que c^2 debe ser igual a 64 y 2c debe ser igual a d. Por tanto, c debe ser igual a 8 o -8 y, como $d = 2c$, d podría ser 16 o -16. Entonces tenemos

$x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$ o $x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$

Resolución de una ecuación cuadrática al completar el cuadrado:

Resolver $x^2 - 5x + 3 = 0$

Solución: Es conveniente primero reescribir la ecuación para que los únicos términos que contengan x se encuentren en el lado izquierdo como sigue:

$x^2 - 5x + 3 = 0$	enunciado
$x^2 - 5x = -3$	reste 3
$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$	completar el cuadrado
$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$	ecuación equivalente
$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}}$	tome la raíz cuadrada
$x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$	sumar $\frac{5}{2}$

Entonces, las soluciones de la ecuación son $\frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4.3$ y $\frac{5-\sqrt{13}}{2} \approx 0.7$.

Ejercicios: Resolver utilizando el método de formar un Trinomio Cuadrado Perfecto.

a) $x^2 + 2x - 1 = 0$ b) $4x^2 + 3x - 22 = 0$ c) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

7.2.3 Fórmula general

Si $a \neq 0$, las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos: Uso de la fórmula cuadrática

Resuelva la ecuación $4x^2 + x - 3 = 0$

Solución.-

Sea $a = 4, b = 1, y\ c = -3$ en la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{8}$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{8}$$

Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{-1 + 7}{8} = \frac{3}{4} \qquad y \qquad x = \frac{-1 - 7}{8} = -1$$

Resuelva la ecuación $2x(3 - x) = 3$

Solución. Para usar la fórmula cuadrática, debemos escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las siguientes ecuaciones son equivalentes:

$2x(3-x)=3$

$6x-2x^2=3$

$-2x^2+6x-3=0$

$2x^2-6x+3=0$

Ahora sea $a=2, b=-6, y\ c=3$ en la fórmula cuadrática, obteniendo

$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(2)(3)}}{2(2)}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{4}$

$x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$

$$x=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\approx 2.37 \qquad y \qquad x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}\approx 0.63$$

Ejercicios: Resolver mediante la Fórmula General.

a) $x^2-5x+6=0$ b) $x^2-7x-7=0$ c) $3x^2-5x+4=0$

d) $5x^2-6x+7=0$ e) $3x^2-5x+2=0$ f) $6x^2+5x-2=0$

7.3 Función polinómica

Las ecuaciones consideradas en las secciones anteriores son inadecuadas para muchos problemas. Por ejemplo, en aplicaciones a veces es necesario considerar potencias x^k con $k>2$. Algunas ecuaciones comprenden valores absolutos o radicales. En esta sección se dan ejemplos de ecuaciones de estos tipos que se pueden resolver usando métodos elementales.

7.3.1 Solución de una ecuación cúbica

Resuelva la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$x^2(x+2) - 1(x+2) = 0$	agrupar términos
$(x^2 - 1)(x+2) = 0$	factorizar $x + 2$
$(x+1)(x-1)(x+2) = 0$	factoriza $x^2 - 1$
$x + 1 = 0,\ x - 1 = 0,\ x + 2 = 0$	teorema del factor cero
$x = -1,\ x = 1,\ x = -2$	despejar x

Resolver la ecuación $x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$

Solución:

$x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 0$	restar $x^{\frac{1}{2}}$
$x^{\frac{1}{2}}(x-1) = 0$	factorizar $x^{\frac{1}{2}}$
$x^{\frac{1}{2}} = 0,\ x - 1 = 0$	teorema del factor cero
$x = 0,\ x = 1$	despejar x

7.3.2 Solución de una ecuación a la cuarta potencia

Resuelva la ecuación $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Solución. Como $x^4 = (x^2)^2$, la forma de la ecuación sugiere que hagamos $u = x^2$, como en la segunda línea que sigue:

$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

$u^2 - 3u + 1 = 0$

$u = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Entonces, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \quad \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Con el uso de una calculadora, obtenemos aproximaciones $\pm 1.62\ y\ \pm 0.62$.

Ejercicios: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$ b) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

c) $3y^4 - 5y^2 + 8 = 0$

8. Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Una solución de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera cada una de las ecuaciones. Resolver un sistema significa hallar las soluciones del sistema.

Ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{array}{cccl} 2x & -y & = 5 & Ecuación\ 1 \\ x & +4y & = 7 & Ecuación\ 2 \end{array}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1	Ecuación 2
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2(3) - 1 = 5$	$3 + 4(1) = 7$

La solución también se puede escribir como el par ordenado (3,1).

Observe que las gráficas de las ecuaciones 1 y 2 son rectas (vea la figura). Como la solución (3,1) satisface cada una de las ecuaciones, el punto (3,1) se encuentra en cada recta. Por lo tanto, es el punto de intersección de las dos rectas.

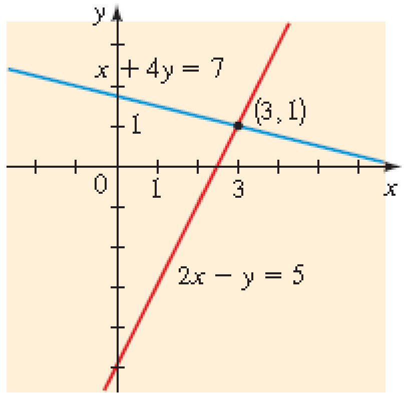


Ilustración 3. Solución de un sistema de ecuaciones.

8.1 Solución de sistemas de ecuaciones 2x2

8.1.1 Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{array}{llll} 2x & +y & =1 & \textit{Ecuación } 1 \\ 3x & +4y & =14 & \textit{Ecuación } 2 \end{array}$$

Solución.- Despejar una incógnita. Despejamos y en la primera ecuación.

$y = 1 - 2x$ Despeje y en la ecuación 1

Sustituir. A continuación sustituimos y en la segunda ecuación y despejamos x.

$3x + 4(1 - 2x) = 14$ sustituya $y = 1 - 2x$ en la ecuación 2

$3x + 4 - 8x = 14$ expanda

$-5x + 4 = 14$ simplifique

$-5x = 10$ reste 4

$x = -2$ Despeje x

Sustitución. A continuación sustituimos $x = -2$ en la ecuación $y = 1 - 2x$.

$y = 1 - 2(-2) = 5$ sustitución

Entonces, $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. La siguiente ilustración muestra que las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el punto $(-2, 5)$.

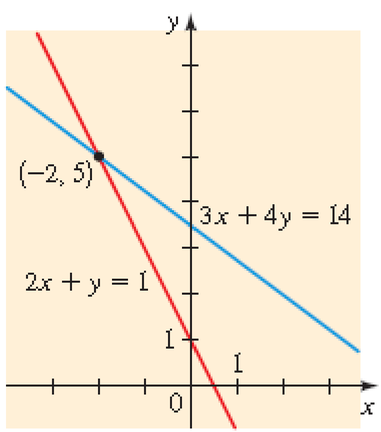


Ilustración 4. Solución por método de sustitución

8.1.2 Método por eliminación

Para resolver un sistema usando el método de eliminación, tratamos de combinar las ecuaciones usando sumas o restas para eliminar una de las incógnitas.

1.- Ajustar los coeficientes. Multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.

2.- Sumar las ecuaciones. Sume las dos ecuaciones para eliminar una incógnita y, a continuación, despeje la incógnita restante.

3.- Sustituir a la inversa. En una de las ecuaciones originales, sustituye el valor hallado en el paso 2 y despeje la incógnita restante.

Ejemplo: Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{array}$$

Solución: Como los coeficientes de los términos en y son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{array}{rcll} \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & & & \text{Sistema} \\ \hline 4x & = & 16 & \text{Sume} \\ x & = & 4 & \text{Despeje } x \end{array}$$

A continuación sustituimos $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y despejamos y. Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$x - 2y = 2$	Ecuación 2
$4 - 2y = 2$	Sustituya $x = 4$ en la Ecuación 2
$-2y = -2$	Reste 4
$y = 1$	Despeje y

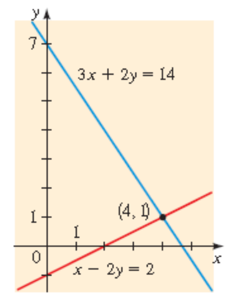


Ilustración 5.- Grafica de las ecuaciones.

La solución es $(4,1)$. La ilustración muestra que las gráficas de las ecuaciones del sistema se cruzan en el punto $(4,1)$.

8.1.3 Método de igualación

$$\begin{aligned} 7x \quad +4y \quad &= 13\ \mathit{Ecuación}\ 1 \\ 5x \quad -2y \quad &= 19\ \mathit{Ecuación}\ 2 \end{aligned}$$

Despejemos una cualquiera de las dos incógnitas: por ejemplo x, en ambas ecuaciones.

Despejando x en Ecuación 1: $7x = 13 - 4y \ \therefore x = \frac{13-4y}{7}$

Despejando x en Ecuación 2: $5x = 19 + 2y \ \therefore x = \frac{19+2y}{5}$

Ahora se igualan entre sí los dos valores de x que hemos obtenido:

$$\frac{13-4y}{7}=\frac{19+2y}{5}$$

Y ya se tiene una sola ecuación con una incógnita; hemos eliminado la x. Resolviendo esta ecuación:

$$5(13-4y)=7(19+2y)$$

$$64-20y=133+14y$$

$$-20y-14y=133-65$$

$$-34y=68$$

$$y=-2$$

Sustituyendo este valor de y en cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en la ecuación 1 (generalmente se sustituye en la más sencilla), se tiene

$$7x+4(-2)=13 \therefore 7x-8=13$$

$$7x=21 \ \therefore \quad x=3$$

Y se tiene que $x=3,$ y $y=-2.$

Ejercicios: Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por medio de los tres métodos planteados, compare y compruebe las soluciones.

1.- $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$ 2.- $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$ 3.- $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$

8.2 Solución de sistemas de ecuaciones 3x3

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se procede de este modo:

1) Se combinan dos de las ecuaciones dadas y se elimina una de las incógnitas (lo as sencillo es eliminarla por suma o resta) y con ello se obtiene una ecuación con dos incógnitas.

Se combina la tercera ecuación con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas y se elimina entre ellas la misma incógnita que se eliminó antes, obteniéndose otra ecuación con dos incógnitas.

3) Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones con dos incógnitas que se ha obtenido, hallando de este modo dos de las incógnitas.

4) Los valores de las incógnitas obtenidos se sustituyen en una de las ecuaciones dadas de tres incógnitas, con lo cual se halla la tercera incógnita.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x + 4y - z &= 6 \qquad (1) \\ 2x + 5y - 7z &= -9 \qquad (2) \\ 3x - 2y + z &= 2 \qquad (3) \end{aligned}$$

Combinamos las ecuaciones (1) y (2) y vamos a eliminar la x. Multiplicando la ecuación (1) por la (2), se tiene:

$$\begin{array}{rl} 2x + 8y - 2z & = 12 \\ -2x - 5y + 7z & = 9 \\ \hline +3y + 5z & = 21 \quad (4) \end{array}$$

Cambiamos la tercera ecuación (3) con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas. Vamos a cambiarla con (1) para eliminar la x. Multiplicando (1) por 3 tenemos:

$$\begin{array}{rl} 3x + 12y - 3z & = 18 \\ -3x + 2y - z & = -2 \\ \hline -14y - 4z & = 16 \quad (5) \end{array}$$

Simplificando (5) queda de la siguiente manera:

$$7y - 2z = 18 \qquad (5)$$

Ahora tomamos las dos ecuaciones con dos incógnitas que hemos obtenido (4) y (5) y formamos un sistema:

$$\begin{array}{llll} 3y & +5z & = 21 & (4) \\ 7y & -2z & = \ \ 8 & (5) \end{array}$$

Resolviendo este sistema. Vamos a eliminar la z multiplicando (4) por 2 y (5) por 5:

$$\begin{array}{rl} 6y + 10z & = 42 \\ 35y - 10z & = 40 \\ \hline 41y & = 82 \end{array}$$

$$y = 2$$

Sustituyendo $y = 2$ en (5) se tiene:

$$7(2) - 2z = 8$$

$$14 - 2x = 8$$

$$-2z = -6$$

$$z = 3$$

Sustituyendo $y = 2$, $z = 3$ en cualquiera de las tres ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), se tiene:

$$x + 4(2) - 3 = 6$$

$$x + 8 - 3 = 6$$

$$x = 1$$

Las soluciones son: $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$.

Ejercicios: Encuentre las soluciones que satisfagan a los sistemas de ecuaciones propuestos.

1.- $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 5z = -5 \\ 2y - 3z = 5 \end{cases}$

2.- $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ 4x + y + 5z = 4 \end{cases}$

Anexos para consulta

A.1 Unidades de medición de ángulos

La medida de un ángulo es la cantidad de rotación alrededor del vértice para mover R_1 sobre R_2. En sentido antihorario se considera positivo y en sentido horario se considera negativo.

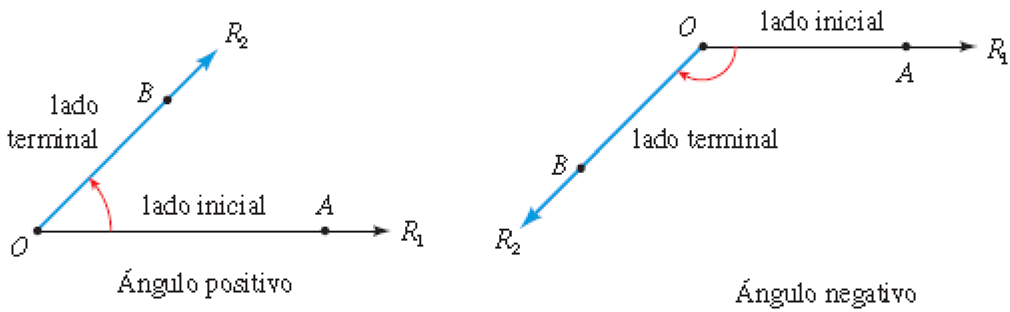


Ilustración 6. Medida y sentido de medición de ángulos

Intuitivamente, esto es lo que "abre" el ángulo. Una unidad de medida para los ángulos es el grado. Un ángulo de medida 1 grado se forma al girar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de matemáticas, se usa un método más natural de medir ángulos y es la medida en radianes. La cantidad que abre un ángulo se mide a lo largo del arco de una circunferencia de radio 1 con su centro en el vértice del ángulo.

Definición del radián.

Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la media de este ángulo en radianes (abreviado rad) es la longitud del arco que subtiende el ángulo.

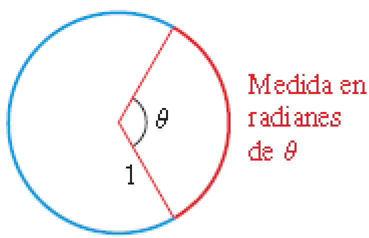


Ilustración 7,. Medida de ángulo en radianes.

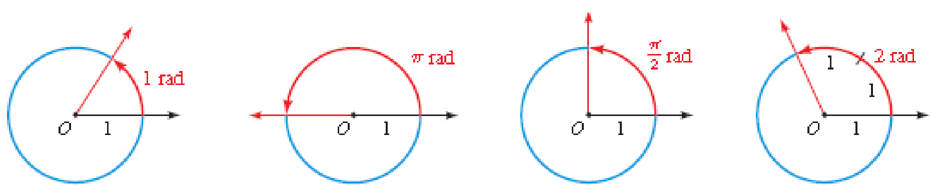


Ilustración 8. Medida de ángulos en radianes.

Relación entre grados y radianes.

$$180° = \pi \, rad \qquad 1 \, rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} rad$$

1.- Para convertir grados a radianes, multiplique por $\frac{\pi}{180}$.

2.- Para convertir radianes a grados, multiplique por $\frac{180}{\pi}$.

$$1 \, rad \approx 57.296° \qquad y \qquad 1° \approx 0.01745 \, rad$$

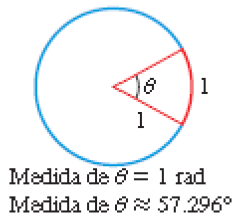


Ilustración 9. Equivalencias entre medidas en radianes y grados.

A.2 Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Considere un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue donde r es la hipotenusa:

Sea θ un ángulo en posición normal y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Ilustración 10. Relaciones trigonométricas.

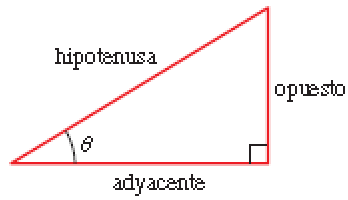


Ilustración 11. Triángulo rectángulo.

El tamaño del triángulo es irrelevante, siempre y cuando sea triángulo rectángulo.

A.3 Signos de las funciones trigonométricas

Tabla 10. Signos de las funciones trigonométricas según el cuadrante.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

A.4 Relaciones trigonométricas para ángulos en general

Para ángulos que no son agudos las funciones trigonométricas tienen el mismo valor, excepto posiblemente por el signo, como las correspondientes funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Ese ángulo agudo recibirá el nombre de ángulo de referencia.

Sea θ un ángulo en posición normal. El **ángulo de referencia** $\overline{\theta}$ asociado con θ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

En la siguiente ilustración se observa cómo se toma el ángulo de referencia $\bar{\theta}$, observe que es útil conocer el cuadrante en el que se encuentra el lado terminal de θ.

Evaluación de funciones trigonométricas para cualquier ángulo.

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo θ, damos los siguientes pasos:

1.- Hallar el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ asociado al ángulo θ.

2.- Determinar el signo de la función trigonométrica de θ observando el cuadrante en el que se encuentre θ.

3.- El valor de la función trigonométrica de θ es el mismo, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$.

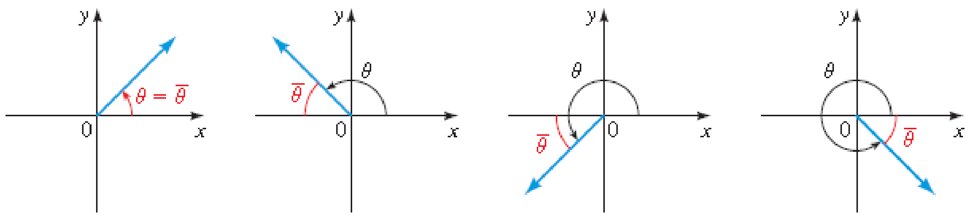


Ilustración 12. Toma de ángulo de referencia.

A.5 Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas de ángulos están relacionadas entre sí por medio de varias e importantes ecuaciones llamadas identidades trigonométricas. Estas identidades continúan cumpliéndose para cualquier ángulo θ, siempre que ambos lados de la ecuación estén definidos. Las identidades de Pitágoras son una consecuencia del Teorema de Pitágoras.

Tabla 11. Identidades trigonométricas.

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

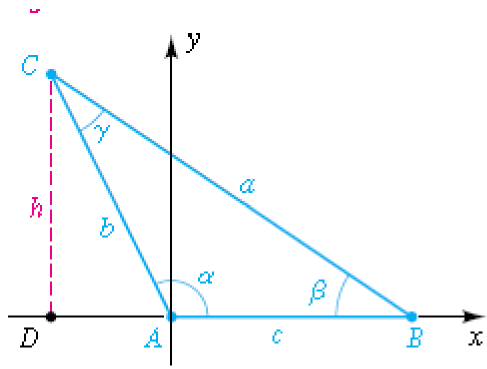
Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

A6 Ley de los senos

Si ABC es un triángulo oblicuo en la forma usual (como en la ilustración), entonces:

$$\frac{\operatorname{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\,\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\,\gamma}{c}.$$

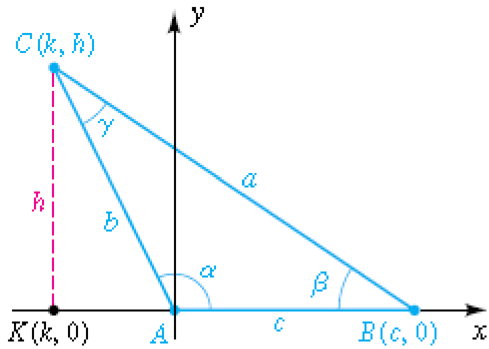


(1) $\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ (2) $\frac{\sin\propto}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$ (3) $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

A.7 Ley de los cosenos

Si ABC es un triángulo marcado en la forma acostumbrada (como en la ilustración), entonces

$$(1)\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$(2)\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$(3)\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



A.8 Pendientes de una recta

Sea l una recta que no es paralela al eje y y sean $P_1(x_1, y_1) y\ P_2(x_2, y_2)$puntos distintos en l. La pendiente m de l es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si l es paralela al y, entonces la pendiente de l no está definida.

La ecuación de una recta que intersecta al eje y en b y tiene pendiente m es

$$y = mx + b$$

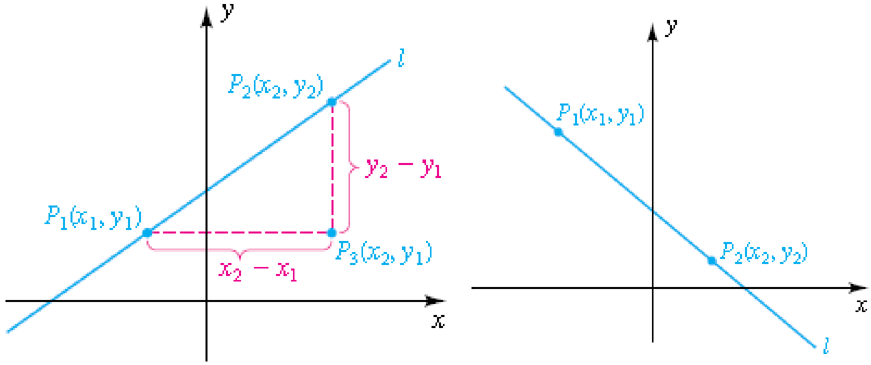


Ilustración 13. a) pendiente positiva   b)pendiente negativa.

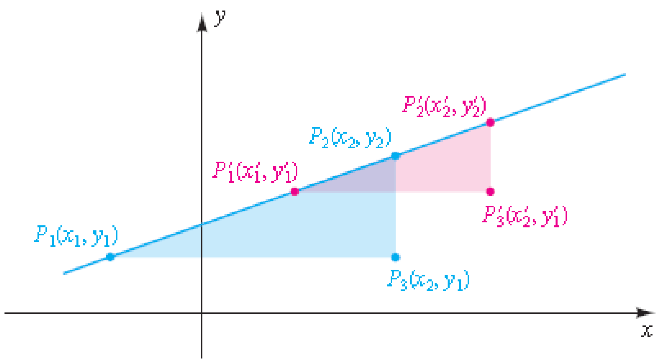


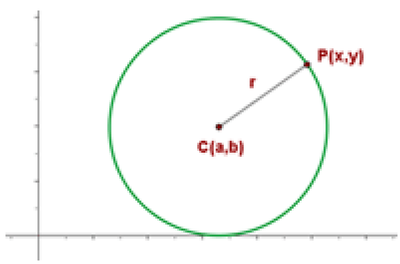
Ilustración 14. Semejanzas en los triángulos formados a lo largo de la recta con la misma pendiente.

A.9 Circunferencia

La ecuación de una circunferencia se encuentra dada por la siguiente expresión:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

donde el centro C esta dado por las coordenadas C(a,b) y los puntos de la circunferencia por el conjundo de coordenadas P(x,y).



Para la siguiente expresión $(x+4)^2+(y-2)^2=16$ donde la recta $3x+4y-16=0$ es tangente a la circunferencia. En la siguiente ilustración se puede apreciar.

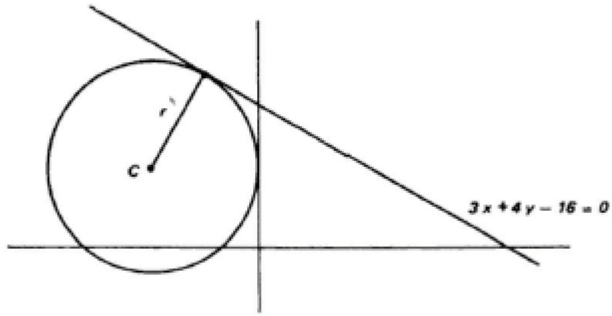


Ilustración 15.- Circunferencia con una recta tangente.

A.10 Parábola

Una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo F (el foco) y una recta fija l (la directriz) que está en el plano con vértice en V.

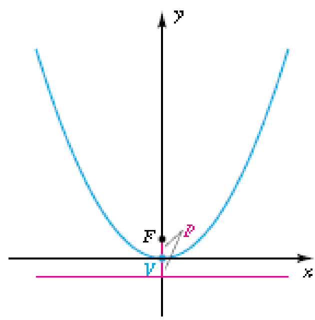
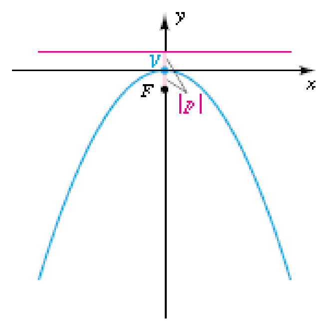
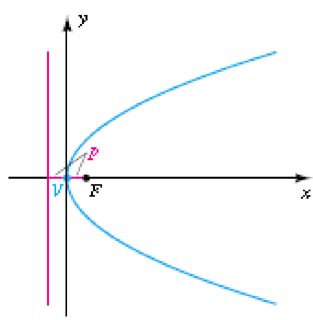
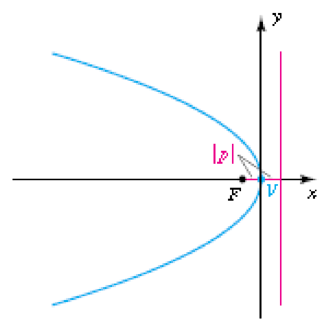
Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$x^2 = 4py$ o $y = \frac{1}{4p}x^2$ Foco: $F(0, p)$ Directriz: $y = -p$		
$y^2 = 4px$ o $x = \frac{1}{4p}y^2$ Foco: $F(p, 0)$ Directriz: $x = -p$		

Ilustración 16. Parábola con vértice V(0,0)

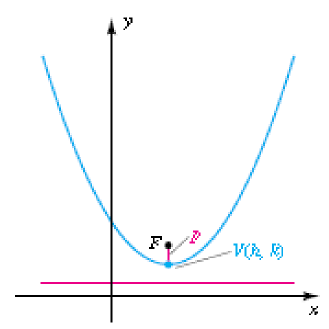
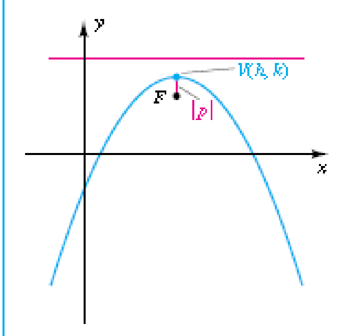
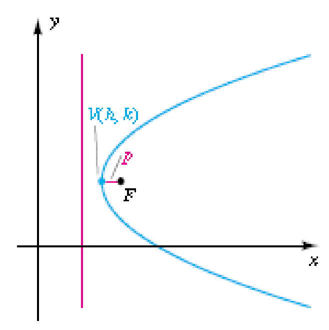
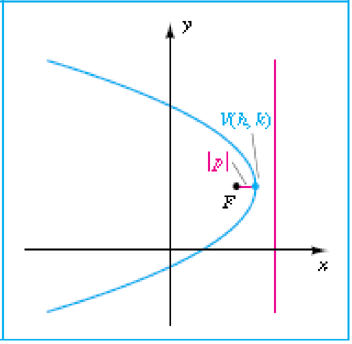
Ecuación, foco, directriz	Gráfica para $p > 0$	Gráfica para $p < 0$
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ o $y = ax^2 + bx + c$, donde $p = \frac{1}{4a}$ Foco: $F(h, k + p)$ Directriz: $y = k - p$		
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ o $x = ay^2 + by + c$, donde $p = \frac{1}{4a}$ Foco: $F(h + p, k)$ Directriz: $x = h - p$		

Ilustración 17. Parábola con vértice V(h,k,).

A.11 Elipse

Una elipse es el conjunto de todos los puntos en un plano, la suma de cuyas distancias desde los puntos fijos (los focos) en el plano es una constante positiva.

La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $a > b > 0$, es una elipse con centro en el origen. La longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud del eje menor es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 - b^2$.

Para la siguiente expresión, la gráfica corresponde a una elipse.

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

En la siguiente ilustración se muestra la gráfica correspondiente.

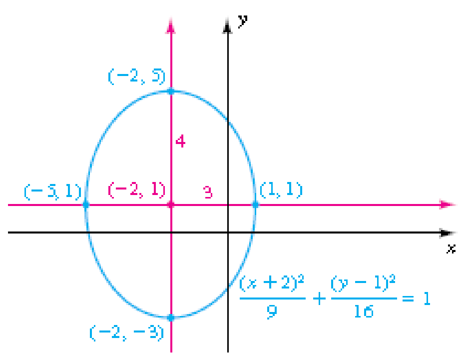


Ilustración 18. Gráfica de una elipse.

A.12 Hipérbola

Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos de un plano, la diferencia de cuyas distancias desde dos puntos fijos (los focos) en el plano es una constante positiva.

La gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

es una hipérbola con centro en el origen. La longitud del eje transversal es $2a$ y la longitud del eje conjugado es $2b$. Los focos están a una distancia c del origen, donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Para la ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$ o bien $x^2 - 4y^2 = 9$ corresponde la gráfica de una hipérbola, la cual se muestra en la siguiente ilustración.

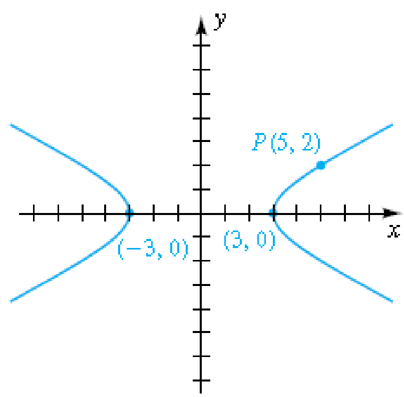


Ilustración 19. Gráfica de una hipérbola.

Bibliografía

BALDOR, A. (s.f.). *Algebra.*

COLE, E. W. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica 12a. edición.* CENGAGE Learning.

LAZO, S. . (2003). *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS: ÁLGEBRA, TRIGONOMETRÍA, GEOMETRÍA ANALÍTICA Y CÁLCULO. 6a Ed.* MÉXICO: LIMUSA.

WATSON, J. S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo 6a. edición.* CENGAGE Learning.

Directorio

M.C. Mirla Cervantes Soberanes
DIRECTORA

Ing. Juan Manuel Peña Valenzuela
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

Ing. Jorge Armando Corral Castro
SUBDIRECTOR DE PLANEACIÓN Y VINCULACIÓN

Ing. José Soledad López González
SUBDIRECTOR DE SERVICIOS ADMINISTRATIVOS

"A la Vanuardia en Ciencia y Tecnología para el Bien de Todos®"